ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΘΗΚΗΣ LIPSCHITZ

Έστω $\varphi \in C(I)$ με $I \subset \mathbb{R}$, τότε
Θα λέμε ότι η φ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz, εάν
$(\exists L \geq 0) : |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L \cdot |x-y| \quad \forall x,y \in I$
(Αυτό θα συνεπάγεται ότι η φ ομοιόμορφα συνεχής στο I)
Όταν $L<1$ τότε η φ <u>συστολή</u> στο I.

πχ
Έστω $\varphi : [-a,a] \to \mathbb{R}$ με $a>0$ και $\varphi(x) = x^2$.
Να εξεταστεί αν η φ είναι Lipschitz, και αν ναι να αποδείξετε πότε είναι συστολή.

ΛΥΣΗ

Έχουμε, $|\varphi(x)-\varphi(y)| = |x^2-y^2| = |x-y|\cdot|y+x| \Rightarrow$

$\Rightarrow |\varphi(x)-\varphi(y)| = |x-y|\cdot|x+y| \leq |x-y|\cdot(|x|+|y|) \Rightarrow$

$\Rightarrow |\varphi(x)-\varphi(y)| \leq \max\limits_{x,y\in I}(|x|+|y|)\cdot|x-y| = 2a\cdot|x-y|$

όπου $|x|=a$ και $|y|=a$ (το μέγιστο από τα αθροίσματα)

άρα το φέραμε στη μορφή Lipschitz
όπου $L = 2a \quad \forall x,y \in I$
Εάν τώρα $L<1 \Rightarrow 2a<1 \Rightarrow \boxed{a<\frac{1}{2}}$
άρα είναι συστολή όταν $a<\frac{1}{2}$.